

ПРОБЛЕМЫ, ТЕНДЕНЦИИ РАЗВИТИЯ И АКТУАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ  
ФИЗИЧЕСКОЙ ХИМИИ

УДК 620.193.8

К 100-летию создания квантовой механики

РАЗРЕШЕНИЕ ПАРАДОКСА УРАВНЕНИЯ ДИРАКА:  
ФЕНОМЕНОЛОГИЯ

© 2024 г. С. Ф. Тимашев

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,

Москва 115409, Россия

e-mail: serget@mail.ru

Поступила в редакцию 09.08.2023

После доработки 09.08.2023

Принята к публикации 04.09.2023

Основываясь на результатах Ф. Вильфа о необходимости учета в уравнении Дирака для электрона принятых в квантовой механике правил соответствия, было показано, что уравнение, получаемое при придании физического смысла  $\alpha$ -операторам Дирака, следует рассматривать как феноменологическое уравнение для частицы ненулевого размера – ЕМ-полярона, ранее введенного автором. Это позволило разрешить присущий уравнению Дирака парадокс, состоящий в равенстве скорости перемещаемых частиц скорости света в вакууме  $c$ , что *a priori* нереализуемо, а также понять физическую сущность спина как собственного механического момента ЕМ-полярона. Было показано также, что уравнение Дирака–Вильфа в случае одного пространственного измерения может рассматриваться как обобщение уравнения Шредингера на случай релятивистских энергий.

PACS: 03.65.-w; 03.65. Pm; 03.75.-b

*Ключевые слова:* уравнение Дирака, волна–частица, спин электрона, уравнение Шредингера при релятивистских энергиях частицы.

DOI: 10.31857/S0044453724040016, EDN: QGFVER

ВВЕДЕНИЕ

Релятивистское уравнение Дирака [1] для электрона является одним из базовых уравнений современной квантовой науки. Оно считается справедливым не только для электронов, но и для других простых (не составных, как нуклоны) частиц со спином  $s = \frac{1}{2} \hbar$ , где  $\hbar$  – постоянная Планка, в частности мюонов, нейтрино. Для кварков как «частиц», входящих в структуру нуклонов, уравнение Дирака тоже считается применимым. При этом есть одно смущающее обстоятельство. В соответствии с выводом [2] этого уравнения оно справедливо лишь для скорости частиц, равной скорости  $c$  света в вакууме, что само по себе парадоксально. Действительно, насколько вообще можно говорить

о квантово-механическом уравнении в данном случае, поскольку материальные частицы не могут перемещаться с такими скоростями?

В работах [3, 4] было показано, что решение проблем, связанных с установлением физической сущности квантовой механики, в том числе относящихся к учету эффектов при релятивистских скоростях движения частиц, оканчивается возможным при выборе абсолютной базовой системы отсчета, в качестве которой следует выбрать электромагнитную составляющую физического вакуума – ЕМ-вакуум, «привязанный» к расширяющейся («разбухающей») евклидовой Вселенной. При этом принимается шкала глобального времени  $t$ , единого для всех точек Вселенной и отсчитываемого с момента

$t = 0$ , соответствующего Большому Взрыву. Полагается также, что ЕМ-вакуум воздействует на все материальные тела Вселенной, конкретно на электроны и атомные ядра, которые оказываются открытыми системами для ЕМ-вакуума. Эти воздействия проявляются через возникновение потенциальной энергии Казимира с определенными граничными условиями на поверхности электронов и атомных ядер и через формирование областей казимировской поляризации, образуемых виртуальными фотонами в приповерхностной области этих частиц, которые фактически должны проявлять себя как неточечные частицы – ЕМ-поляроны.

Фактически через введение казимировских потенциалов опосредованно решается проблема, стоявшая перед Эйнштейном, когда он вводил постоянную гравитации в тензор энергии в Общей теории относительности (ОТО). Он писал, что «вместо скалярной плотности вещества мы должны оперировать с тензором энергии, отнесенным к единице объема. В последний включен не только тензор энергии вещества, но и электромагнитного поля. Однако... описание вещества с помощью тензора энергии, с точки зрения более точной теории, следует рассматривать только как предварительное. В действительности вещество состоит из электрически заряженных частиц и должно само рассматриваться как часть, и притом главная часть, электромагнитного поля. И только тот факт, что мы недостаточно знаем законы электромагнитного поля сконцентрированных зарядов, вынуждает нас при изложении теории оставить истинную форму этого тензора пока неопределенной» ([5], с. 68). Поэтому введение Эйнштейном гравитационной постоянной  $G$  в качестве количественного параметра тензора энергии следует рассматривать как простейший и вынужденный вариант.

В то же время введение казимировской потенциальной энергии частиц (электронов и атомных ядер) в виде  $U(\vec{r}) = -\alpha_C \hbar c / r$ , где  $\vec{r}$  – радиус-вектор (мы связываем систему координат с ЕМ-вакуумом и полагаем, что покоящаяся частица локализована в начале координат),  $\alpha_C$  – безразмерный параметр, характеризующий интенсивность введенного казимировского взаимодействия ( $\alpha_C = \sqrt{2}$  – см. ниже), позволило не только найти подходы к разрешению присутствующего уравнению Дирака парадокса (см. ниже), но и продвинуться в понимании феномена

гравитации [3]. Прежде всего, из решения уравнения Шредингера в центрально-симметричном поле казимировского потенциала получаем выражение для положения  $\bar{E}_{Vi}$  нижнего энергетического уровня, характеризующего энергию связи рассматриваемой частицы с ЕМ-вакуумом при его поляризации под воздействием этой частицы, а также соответствующее выражение  $a_{Vi}$  для размера области ЕМ казимировской поляризации вакуума в окрестности частицы  $i$ , т.е. размера ЕМ-полярона:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{Vi} &= -\alpha_C^2 \frac{m_i c^2}{2} \xrightarrow{\alpha_C = \sqrt{2}} -m_i c^2; \\ a_{Vi} &= \frac{\alpha_C \hbar}{m_i c} \xrightarrow{\alpha_C = \sqrt{2}} \frac{2^{1/2} \hbar}{m_i c}. \end{aligned} \quad (1)$$

Выбор величины параметра  $\alpha_C = \sqrt{2}$  в (1) для представления абсолютной величины  $\bar{E}_{Vi}$  как «энергии связи частицы с ЕМ-вакуумом» в виде соотношения, введенного Эйнштейном для «энергии покоя рассматриваемой частицы», вполне понятен. Адекватность такого выбора  $\alpha_C$  с очевидностью следует из анализа величин энергосделения  $\Delta E$  при радиоактивных распадах, однозначно показывающих связь эффектов энергосделения  $\Delta E = \Delta m c^2$  с изменением  $\Delta m$  исходной массы радиоактивного вещества, определяемым разницей энергий связи исходного и конечного продуктов с ЕМ-вакуумом.

Из (1) следует, что радиус области казимировской поляризации ЕМ-вакуума в окрестности электрона при указанном выборе  $\alpha_C$  равен  $a_{Ve} = 2^{1/2} \hbar / m_e c = 5.2 \times 10^{-11}$  см. Эта величина может быть принята за «казимировский размер электрона». Введем в рассмотрение величину характерного размера простейшего атома водорода – его «Боровского размера»  $a_B$ , определяемого как значение расстояния электрона от ядра атома водорода (протона), при котором потенциальная энергия электрона  $U_e(a_B)$  в поле ядра равна энергии первого уровня дискретного спектра:  $U_e(a_B) = -e^2 / a_B = -m_e e^4 / 2 \hbar^2$  [6], так что  $a_B = 2 \hbar^2 / m_e e^2 = 1.04 \times 10^{-8}$  см. Поскольку величина области казимировской поляризации в окрестности протона оказывается равной  $a_{Vp} = 2.82 \times 10^{-14}$  см, то есть соответствует масштабу действия ядерных сил, то отношение  $a_{Ve} / a_B$  можно рассматривать как показатель степени перекрытия (взаимодействия) области казимировской поляризации электрона

в основном состоянии атома водорода с областью казимировской поляризации ядра атома водорода – протона. Можно сказать и иначе: именно это отношение связывает безразмерную величину постоянной тонкой структуры  $\alpha_e$  с безразмерной константой казимировского взаимодействия:

$$\alpha_e = \frac{a_{Ve}}{a_B} \alpha_C = \frac{1}{137}. \quad (2)$$

Ниже будет показано, что развитые в [3, 4] представления могут быть использованы для разрешения проблемы указанной парадоксальности уравнения Дирака, основываясь на базовых идеях Ф. Вильфа [7] при реализации квантово-механических принципов соответствия операторов, вводимых при построении этого уравнения, физическим характеристикам движущегося электрона. Будем исходить из записи уравнения Дирака для точечного электрона во внешнем электрическом поле в шредингеровском представлении:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \left[ c \sum_{j=1}^3 \hat{\alpha}_j \hat{p}_j + m_0 c^2 \hat{\alpha}_0 + V(\vec{x}, t) \right] \psi(\vec{x}, t). \quad (3)$$

Здесь  $m_0$  – масса покоя электрона;  $V(\vec{x}, t)$  – потенциальная энергия электрона во внешнем электрическом поле;  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  и  $t$  – пространственные координаты и время соответственно;  $\hat{p}_j = -i\hbar \partial / \partial x_j$  – три оператора компонент импульса (по  $x_1, x_2, x_3$ );  $\psi(\vec{x}, t)$  – четырехкомпонентная комплексная волновая функция (биспинор);  $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3$  – линейные операторы над пространством биспиноров, которые действуют на волновую функцию. Эти операторы подобраны так, что каждая пара их антикоммутирует, а квадрат каждого равен единице:

$\hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j = -\hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_i$ , где  $i \neq j$ , и индексы  $i$  и  $j$  меняются от 0 до 3;

$$\hat{\alpha}_i^2 = 1 \text{ для } i \text{ от } 0 \text{ до } 3.$$

В обсуждаемом представлении эти операторы выражаются матрицами размера  $4 \times 4$ , называемыми альфа-матрицами Дирака:

$$\hat{\alpha}_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma} \\ \hat{\sigma} & 0 \end{pmatrix}; \quad (4)$$

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Здесь 0 и  $I - 2 \times 2$  нулевая и единичная матрицы соответственно;  $\sigma_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) – матрицы Паули, которые были введены Паули для векторного оператора спина  $\vec{s} = (1/2) \cdot \hbar \vec{\sigma}$  ([8], с. 491).

Необходимо подчеркнуть, что указанные операторы  $\hat{\alpha}_i$  были введены как чисто математические образы, безотносительно принципа соответствия в квантовой механике. Согласно этому принципу, каждой рассматриваемой физической характеристике обязан соответствовать оператор, и наоборот: каждому оператору в квантовой механике должна соответствовать физическая характеристика и формула преобразования оператора этой характеристики должна быть идентична формуле преобразования самой характеристики. При этом Дирак указывал, что операторы  $\hat{\alpha}_i$  (при  $i$  от 0 до 3) «описывают некоторые новые степени свободы, относящиеся к какому-то внутреннему движению электрона» ([2], с. 335). Но в то же время при выводе своего уравнения Дирак, скорее всего, вынужденно связал компоненты оператора скорости частицы не с компонентами оператора  $\hat{p}_j$  импульса (что могло ожидать), а с компонентами оператора  $\hat{\alpha}_i$  (см. формулу (24), §69 из [2]):

$$\hat{x}_j = c \hat{\alpha}_j. \quad (5)$$

Поскольку собственные значения оператора  $\hat{\alpha}_i$  равны  $\pm 1$ , то соотношение (5) однозначно приводит к тому, что измерение проекции скорости частицы, причем не только свободной, но и в присутствии поля, должно давать значения либо  $\dot{x}_j = +c$ , либо  $\dot{x}_j = -c$ . Такое заключение следует считать *a priori* нереализуемым и заведомо противоречащим экспериментально наблюдаемым данным: электроны, фиксируемые в экспериментах, могут характеризоваться различными скоростями, меньшими  $c$ , в том числе существенно меньшими скорости  $c$  света в вакууме. Вполне естественно, что на парадоксальность этого заключения неоднократно указывалось в литературе (см., в частности, [8, 9]). Именно в связи с введенным Дираком волновым уравнением Паули писал в 1933 году: «В противоположность нерелятивистской квантовой механике, которую можно считать логически замкнутой, в релятивистской волновой механике мы располагаем сегодня лишь отдельными фрагментами» ([8], с. 529). Следует констатировать, что применительно к уравнению

Дирака эта фрагментарность сохраняется и спустя 90 лет после этого комментария Паули.

Парадоксальность уравнения Дирака усиливается его «фундаментальной ролью в релятивистской квантовой механике и в квантовой теории поля, поскольку оно оказалось применимым к описанию движения частиц со спином  $\frac{1}{2}$  (в единицах  $\hbar$ )» [10]. Как отмечается в [10], на этой основе была не только получена формула Зоммерфельда–Дирака, характеризующая тонкую структуру спектра атома водорода, но и с точностью около 4% описывается величина лэмбовского сдвига, открытого в 1947 году, спустя 8 лет после публикации уравнения Дирака. Эффективность использования уравнения Дирака проявляется в применении не только к электронам, но и к другим элементарным частицам со спином  $s = \frac{1}{2} \hbar$  – фермионам (мюонам, нейтрино), а также к кваркам.

Но при этом возникает и общий вопрос: с чем связана такая фундаментальность уравнения Дирака, которое в силу указанной причины – скорости  $c$  для рассматриваемых частиц – понять невозможно? И существует ли для электрона вообще уравнение 1-го порядка типа уравнения Дирака, справедливое при произвольных кинетических энергиях электрона, релятивистских и нерелятивистских? Возможное разрешение проблемы указанной парадоксальности уравнения Дирака или его «фрагментарности», как более мягко выразился Паули, представлены в данной статье.

### УРАВНЕНИЕ ДИРАКА–ВИЛЬФА

Проблема установления связи введенных Дираком операторов  $\hat{\alpha}_i$  (при  $i$  от 0 до 3) с физическими характеристиками, «описывающими некоторые *новые степени свободы*, относящиеся к *внутреннему движению электрона*» ([2], с. 335), частично была разрешена Ф. Вильфом [7] при рассмотрении внутренней динамики электрона, определяющей его спин. Поскольку Вильф рассматривал электрон как точечную частицу, для придания его логике физической обоснованности будем рассматривать электрон, следуя [3, 4], не как точечную частицу, а как частицу конечного размера – ЕМ-полярон с указанным выше характерным размером  $a_{Ve} = 2^{1/2} \hbar / m_0 c = 5.2 \times 10^{-11}$  см. Для реализации процедуры Вильфа введем вместо  $\hat{\alpha}_0$  и  $\hat{\alpha}$  два размерных оператора:

$$\hat{\tau}_e = \tau_{e0} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\text{и } \hat{R}_{je} = R_{e0} \hat{\alpha}_0 \hat{\alpha}_j = R_{e0} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \equiv R_{e0} \hat{\alpha}_{0j},$$

которым ставятся в соответствие некий временной интервал  $\tau_{e0}$  (период) и компоненты  $R_{e0} \sigma_j$  радиус-вектора  $\vec{R}$  точки сферы – поверхности ЕМ-полярона:

$$\tau_{e0} = \frac{2^{1/2} \hbar}{m_0 c^2}, R_{e0} = \frac{2^{1/2} \hbar}{m_0 c}. \quad (6a)$$

При этом перемещение центра инерции ЕМ-полярона характеризуется импульсом  $\vec{p} = m_u \vec{u}$ , где  $m_u$  и  $\vec{u}$  – соответственно масса и вектор скорости электрона в базовой системе отсчета, связанной с ЕМ-вакуумом. Здесь следует указать, что Вильф при введении параметров  $\tau_{e0}$  и  $R_{e0}$  уравнения Дирака для точечного электрона полагал:  $\tau_{e0} = \hbar / m_0 c^2$ ,  $R_{e0} = \hbar / m_0 c$ .

Что касается скалярного оператора  $\hat{\tau}_e$ , то ему можно поставить в соответствие характерное время перестройки области казимировской поляризации ЕМ-вакуума в окрестности электрона как ЕМ-полярона при его вращении и поступательном движении, которое сопровождается обменом виртуальными фотонами с ЕМ-вакуумом. Именно при таком обмене реализуется своего рода «смазка» при движении частицы (см. [3]). При релятивистских скоростях электрона казимировская поляризация ЕМ-вакуума в направлении движения резко падает из-за потери доли «смазки» во фронтовой и противоположной ей областях казимировской поляризации электрона, сопротивление движению возрастает, вследствие чего возрастает инерционная масса (потенциальная энергия) электрона. Согласно [3], в ультрарелятивистском случае, при  $u \rightarrow c$ , для возрастающей массы движущегося электрона получаем  $m_u = m_0 \eta_u \equiv m_0 (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ . При этом величина характерного размера релятивистского полярона  $R_{eu} = R_{e0} (1 - u^2/c^2)^{1/2}$  в направлении его движения из-за потери доли «смазки» резко падает, возрастает сопротивление движению, вследствие чего возрастает инерционная масса (потенциальная энергия) электрона. Скалярному оператору  $\hat{\tau}_0$  в этом случае ставится в соответствие уменьшающееся время  $\tau_{eu} = \tau_{e0} (1 - u^2/c^2)^{1/2}$  перестройки области кази-

мировской поляризации ЭМ-вакуума, необходимой для движения электрона.

Для введения операторов  $\hat{\tau}_e$  и  $\hat{R}_{ej}$  в уравнение (3), следуя Вильфу [7], подействуем на уравнение (1) оператором  $\hat{\tau}_e$  и перейдем к уравнению

$$i\hbar\hat{\tau}_e \frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t} = \left[ R_e \sum_{j=1}^3 \hat{\alpha}_{0j} \hat{p}_j + \hat{p}_e m_0 c^2 \hat{\alpha}_0^2 + V(\vec{x},t) \tau_e \hat{\alpha}_0 \right] \psi(\vec{x},t). \quad (7)$$

С использованием этих операторов уравнение Дирака приобретает вид:

$$\left\{ \alpha_0 \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - V \right) - m_0 c^2 I \right\} - \frac{R_e}{\tau_e} \sum_{j=1}^3 \alpha_{0j} \hat{p}_j \psi(\vec{x},t) = 0. \quad (7a)$$

Будем называть это волновое уравнение для ЭМ-полярона как неточечной частицы с размером  $R_{e0} = 2^{1/2} \hbar / m_0 c$  и спином  $1/2 \hbar$  уравнением Дирака–Вильфа. Поскольку для электрона  $R_{e0} / \tau_{e0} = c$ , то уравнение (7a) фактически является исходным уравнением Дирака, но, в отличие от исходного уравнения, оно справедливо для произвольных скоростей частицы, нерелятивистских и релятивистских. Тогда становится понятным, почему исходное уравнение Дирака, которое, как указывалось, *a priori* парадоксально, так органически вошло в квантовую науку, причем и в тех случаях, когда скорости частицы заметно меньше скорости  $c$ . Автор полагает, что указанный парадокс, который более 90 лет связывался с уравнением Дирака, можно считать разрешенным именно вследствие рассмотрения электрона как «казимировского ЭМ-полярона» с ненулевым размером.

Более того, именно с введением характерного размера во вращательном движении электрона Ф. Вильф [7] связывал понимание физической сущности собственного механического момента электрона – его спина. Правда, Вильф рассматривал точечный электрон, и ему приходилось вводить сложную траекторию движения этой материальной точки: движение по круговой орбите с радиусом  $R_0$  вокруг некоторой оси,

проходящей через центр окружности, и общее перемещение в пространстве этого центра как центра массы. Введение в рассмотрение ЭМ-полярона как объекта, вращающегося вокруг оси с определенной угловой скоростью и обладающего собственным моментом импульса, фактически материализует идею Вильфа.

Для конкретизации представления о природе спина электрона можно рассмотреть два случая: принять, что основная масса «сферического» ЭМ-полярона либо распределена равномерно по шару, либо сосредоточена в его приповерхностной области («вращающаяся сфера»). При вращении «шара» относительно оси, проходящей через центр, величина его момента инерции  $J_B = \langle 2/5 \rangle \cdot m_0 R_{e0}^2$ , а при вращении сферы соответствующая величина равна  $J_S = \langle 2/3 \rangle \cdot m_0 R_{e0}^2$ . Естественно полагать, что циклическая частота  $\omega_r$  вращения вводимого ЭМ-полярона оценивается как отношение линейной скорости вращения  $u_r$  поверхности к величине радиуса  $R_{e0}$ :  $\omega_r = u_r / R_{e0}$ . Поскольку величина модуля собственного механического момента – спина электрона равна  $L_{Se} = \sqrt{s(s+1)} \hbar = \langle \sqrt{3}/2 \rangle \cdot \hbar$ , то оценку величины  $u_r$  получим из соотношения:

$$k_{B(S)} m_0 R_{e0}^2 \omega_r = L_{Se}, \quad (8)$$

где  $k_B = 2/5$  – при вращении шара,  $k_S = 2/3$  – при вращении сферы. После соответствующих подстановок получаем:

$$u_r = (\sqrt{3}/2 k_{B(S)}) \cdot c, \quad (9)$$

так что  $u_r = 1.53c$  – при вращении шара,  $u_r = 0.92c$  – при вращении сферы.

Здесь сразу следует заметить, что ограничения скорости ниже величины  $c$ , согласно [3], относятся лишь к перемещениям материальных объектов относительно базовой системы отсчета – ЭМ-вакуума и связаны с происходящими перестройками области казимировской поляризации частиц. Поэтому обе полученные оценки для случая вращающегося шара представляются допустимыми.

Следует также заметить, что развитые представления вполне соответствуют ранее развиваемым общим взглядам на природу спина электрона [11], согласно которым спин может

трактоваться как циркулирующий поток энергии в волновом поле электрона. Естественно, что для существования таких циркуляционных процессов или вращения области казимировской поляризации, как в рассматриваемом случае, требуется постоянная «подпитка» энергией, которая возможна только со стороны базовой среды – ЕМ-вакуума [4].

Для иллюстрации возможных приложений введенного уравнения в следующем разделе будут рассмотрены простейшие примеры использования уравнения Дирака–Вильфа для решения квантово-механических задач в случае двух измерений  $(x, t)$  – при переносе электрона по одной координате в условиях воздействия электрического поля  $V(x)$ , потенциальная энергия которого зависит только от координаты. В этом случае задача упрощается и при рассмотрении волновой функции уравнения (7) как биспинора, определяемого четырьмя  $\psi_i(x, t)$  функциями, где  $i = 1, 2, 3$  и  $4$ , уравнение Дирака–Вильфа (ДВ) распадается на две одинаковые пары взаимосвязанных двух уравнений для волновых функций в виде спиноров [12, 13]. В одной из пар взаимосвязанными оказываются образующие спинор функции  $\psi_1(x, t)$  и  $\psi_4(x, t)$ , а в другой – образующие спинор волновые функции  $\psi_2(x, t)$  и  $\psi_3(x, t)$ . Фактически первая из указанных пар рассматривается как совокупность двух связанных уравнений для волновой функции электрона, вторая пара уравнений – для волновой функции позитрона (состояния с отрицательной энергией). Следует подчеркнуть, что получающиеся пары уравнений между собой никак не связаны, если взаимодействие электрона со сторонним электрическим полем не оказывается отталкивательным ( $V(x) > 0$ ), причем при потенциальной энергии, большей энергии возможного образования пары электрон–позитрон, когда  $V(x) > 2m_0c^2$  (см. ниже).

Мы ограничимся здесь рассмотрением именно таких процессов, когда исключена генерация пар частица и античастица, и при этом будем рассматривать стационарные процессы, когда  $\psi_i(x, t) = \tilde{\psi}_i(x)\exp(-iEt/\hbar)$ , где  $E$  – энергия системы. В этом случае для волновой функции электронной подсистемы, определяемой парой различных уравнений для компонентов биспинора  $\tilde{\psi}_1(x)$  и  $\tilde{\psi}_4(x)$ , которые в последующем будем обозначать как  $\tilde{f}(x)$  и  $\tilde{g}(x)$  соответственно, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} [E - V(x) - m_0c^2]\tilde{f}(x) + i\hbar\frac{R_e}{\tau_e}\frac{d\tilde{g}(x)}{dx} &= 0, \\ [E - V(x) + m_0c^2]\tilde{g}(x) + i\hbar\frac{R_e}{\tau_e}\frac{d\tilde{f}(x)}{dx} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

После дифференцирования второго уравнения по координате эту систему можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tilde{f}(x)}{dx^2} + \frac{1}{E + m_0c^2 - V(x)}\frac{dV(x)}{dx}\frac{d\tilde{f}(x)}{dx} + \\ + \frac{\tau_e^2}{\hbar^2 R_e^2} \left\{ [E - V(x)]^2 - (m_0c^2)^2 \right\} \tilde{f}(x) &= 0, \quad (10a) \\ \tilde{g}(x) &= -\frac{i\hbar R_e}{\tau_e [E + m_0c^2 - V(x)]} \frac{d\tilde{f}}{dx}. \end{aligned}$$

Следует указать, что при представлении уравнения Дирака–Вильфа в виде (10) и (10a) компоненты спинора  $\tilde{f}(x)$  и  $\tilde{g}(x)$  характеризуют волновую функцию и ее производную, так что для сопряжения решений на границах областей с различными сторонними потенциалами следует просто требовать непрерывности функций  $\tilde{f}(x)$  и  $\tilde{g}(x)$  соответственно.

Фактически уравнения (7), (10) и (10a) материализуют волну-частицу, базовый объект квантовой механики, который до сих пор вводился лишь гипотетически в виде образа волны де Бройля, не вписываясь в аппарат и уравнения квантовой механики, выражая лишь саму идею совмещения в одном объекте волновых и корпускулярных свойств. Действительно, обычно постулируемая волна-частица де Бройля из-за вынужденно приписываемой ей временной дисперсии должна распадаться на микроскопических расстояниях. Поэтому любой серийный электронный микроскоп просвечивающего типа фактически работает вопреки ортодоксальной трактовке, и в практике электронной микроскопии приходится считать, что внутри микроскопа волна де Бройля фактически сопровождает электрон и без распада проходит значительное расстояние от катода до детектора.

Здесь следует подчеркнуть, что именно введение ЕМ-вакуума как базовой материальной среды и представление о казимировской поляризации ЕМ-вакуума в окрестности элементарных частиц и атомных ядер обусловило возможность рассмотрения образа волны-частицы в рамках

квантовой механики. Действительно, перемещение каждой частицы  $i$  в ЕМ-вакууме как ЕМ-полярона с массой  $m_{i0}$ , характерным размером  $R_{i0}$  и скоростью  $u$  фактически означает перемещение фиксируемой по размеру локальной гетерогенности ЕМ-вакуума как уединенной волны с импульсом  $p = m_{iu}u$  и энергией:

$$E = \sqrt{\frac{R_{i0}^2}{\tau_{i0}^2} p^2 + m_{i0}^2 c^4} = m_{iu} c^2. \quad (11)$$

Из (11) следует, что при использовании уравнения DW необходимо требовать  $R_{i0}/\tau_{i0} = c$ , как это реализуется при переносе электронов, или предполагать, что из-за релаксационной перестройки областей поляризации Казимира, которая определяет скорость обмена виртуальными фотонами между поляроном и электромагнитным вакуумом, когда при переносе рассматриваемых частиц в вакууме [11, 12] происходит их эффективная перенормировка масс:  $m_{iu} \rightarrow m_{ieff} = (R_{i0}/c\tau_{i0})m_{iu}$ . В этом случае  $p_{ieff} = m_{ieff}u$ , и полная энергия передаваемого им полярона представляется в виде:

$$E = \sqrt{c^2 p_{ieff}^2 + m_{i0}^2 c^4} \equiv m_{ieff} c^2. \quad (12)$$

Длина волны  $\lambda_{iDW}$ , создаваемая такой движущейся неоднородностью электромагнитного вакуума, естественным образом связана с характерным размером  $R_{i0}$  полярона Казимира, а циклическая частота  $\omega_{i0}$  релаксационной перестройки области поляризации Казимира электромагнитного вакуума вблизи перемещаемой частицы при ее перемещении естественным образом связана с параметром  $\tau_{i0}$ , введенным в уравнение Дирака–Вильфа, так что  $\omega_{i0} = 2\pi/\tau_{i0}$ . Если мы охарактеризуем движение рассматриваемого возмущения электромагнитного вакуума волновым числом  $k_{iDW} = 2\pi/\lambda_{iDW}$ , то получим выражение:

$$u_{iph} = \omega_{i0}/k_{iDW} = \lambda_{iDW}/\tau_{i0} = R_{i0}/\tau_{i0} \quad (13)$$

для фазовой скорости  $u_{iph}$  волны, возникающей в электромагнитном вакууме при движении электромагнитного полярона. При переносе электронов  $u_{iph} = c$ . Используя (12), мы получаем групповую скорость  $u_{ig} = dE/dp_{ieff} = u$  волны Дирака–Вильфа как общей уединенной волны (переносимого электромагнитного полярона) и электромагнитное возмущение вакуума, сопровождающее этот перенос.

Поскольку в данном случае подстройка фазы общей уединенной волны не зависит от частоты, определяясь постоянной величиной — отношением  $R_{i0}/\tau_{i0}$ , то временная дисперсия отсутствует и размывания волны-частицы Дирака–Вильфа электрона, других стабильных элементарных частиц и стабильных атомных ядер по мере их распространения не будет происходить.

Что касается переноса электрона как ЕМ-полярона Дирака–Вильфа, то это полностью соответствует не только феномену просвечивающей электронной микроскопии, но и пионерскому исследованию Л. Бибермана, Н. Сушкина и В. Фабриканта [14], в котором было экспериментально подтверждено, что волновые свойства присущи не только потоку электронов, но и каждому электрону в отдельности. Было показано, что даже в случае неинтенсивного электронного пучка, когда каждый электрон проходит через прибор независимо от других, возникающая при длительной экспозиции дифракционная картина не отличается от дифракционных картин, получаемых при короткой экспозиции для потоков электронов, в миллионы раз более интенсивных. Электрон (его кинетическая энергия составляла  $E_e = 72$  кэВ) проходил прибор за  $8.5 \times 10^{-9}$  с, затем в течение в 30 000 раз (!) большего интервала времени (в среднем) прибор оставался пуст, и лишь после этого через него проходил новый электрон. Очевидно, что при таком огромном интервале времени между последовательными прохождениями вероятность одновременного прохождения хотя бы двух электронов ничтожна. Введенные представления об электроме как казимировском поляроне позволяют понять результаты этой классической, но мало цитируемой работы В.А. Фабриканта и его учеников, а также обосновать базовую гипотезу ортодоксальной квантовой механики об адекватности образа волна-частица Дирака–Вильфа применительно к элементарным частицам и атомным ядрам.

## УРАВНЕНИЕ ДИРАКА–ВИЛЬФА В РЕШЕНИИ ПРОСТЕЙШИХ КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

«Парадокс Клейна»

Обычно при упоминании выражения «парадокс» в связи с релятивистским уравнением Дирака [1] имеется в виду не обсуждаемая выше

величина  $c$  скорости частиц в этом уравнении, а парадоксальность результата статьи Клейна [15], опубликованной в 1929 году, через год после публикации [1]. В статье Клейна (см. также [12, 13, 16]) анализировалась возможность проникновения релятивистских электронов через потенциальные барьеры при использовании уравнения Дирака для оценки вероятностей такого процесса. Квантовой механике к тому времени было всего три года. Парадоксальность полученного Клейном результата состояла в том, что при анализе проникновения электронной волны, падающей на отталкивающий, бесконечно протяженный и достаточно высокий по энергии потенциальный барьер  $V(x)$ , превышающий величину  $2m_0c^2$ , где  $m_0$  — масса покоя электрона, расчет показывал, что электрон при полной энергии электрона, меньшей энергии потенциального барьера, может туннелировать в область бесконечно отталкивающего потенциала, не испытывая при этом экспоненциального затухания, характерного для процессов туннелирования. При этом отраженный от потенциальной ступеньки электронный поток при энергиях электрона, превышающих  $2m_0c^2$ , превосходил падающий на нее поток. Как показали последующие исследования [17], при энергиях электрона, превышающих  $2m_0c^2$ , задача одного тела в данном случае теряет смысл из-за инициирования эффекта Швингера [18] — процесса самопроизвольной генерации электрон-позитронных пар из вакуума в сильном электрическом поле области возрастания величины энергетического барьера для электрона (протяженность этой области должна быть порядка комптоновской длины волны).

В работе [17] рассматривалась задача рассеяния релятивистских электронов на одномерном потенциале конечной ширины при использовании уравнения Клейна–Гордона–Фока, содержащего вторую производную по времени. Было получено, что сумма отраженных и прошедших через барьер токов всегда в точности равна току падающих частиц, и показано, что отмеченное Клейном превышение тока прошедших через барьер частиц над током падающих частиц обусловлено увеличением полного числа частиц в результате рождения электрон-позитронных пар при инициирующем воздействии напряженности электрического поля барьера. При этом, как было показано, электроны с энергиями, меньшими энергии потенциального

барьера, свободно распространяются в области барьера не могут.

Наиболее общий подход к интерпретации парадокса Клейна, базирующийся на использовании волновых уравнений, включающих вторую производную по времени, представлен в работе [9], в которой были проанализированы два типа уравнений указанного типа: вводимое для скалярных материальных полей уравнение Клейна–Гордона–Фока и вводимое для спинорных полей квартионное уравнение [19], название которого обусловлено тем, что общее решение указанного уравнения выражается через четыре ортогональных биспинора (квартиона). Конкретно в работе [9] показано, что при высоте энергетического барьера  $V(x)$ , превышающей величину  $2m_0c^2$ , парадокс Клейна находит наглядную и последовательную интерпретацию, связанную с топологией пространства состояний материальных полей, описываемых квартионными уравнениями. Пространство состояний свободной частицы представляет собой две гиперплоскости в четырехмерном пространстве, отделенные запрещенной зоной шириной  $E_{gap} = 2m_0c^2$ : одна из гиперплоскостей связана с положительными частотными решениями волновых уравнений, а вторая — с отрицательными частотными. Если высота скачка потенциальной энергии меньше ширины запрещенной зоны  $V(x) < 2m_0c^2$ , то в стационарном случае эволюция частиц, состояния которых принадлежат к положительно и отрицательно частотным зонам состояний, происходит независимо друг от друга.

Проведенный анализ полностью подтвердил основные заключения, сделанные в работе [17], то есть практически снял все вопросы, относящиеся к «парадоксу Клейна». Однако переход от волнового уравнения Дирака с использованием первого порядка по временной производной к волновым уравнениям Клейна–Гордона–Фока и квартионным уравнениям, включающим вторую временную производную, фактически смещает исходно рассматриваемую проблему, ориентированную на использование уравнения Дирака. Действительно, размерность релятивистского пространства состояний уравнений Клейна–Гордона–Фока вдвое шире, чем размерность пространства состояний материального поля, описываемого уравнениями с первой производной по времени, как это имеет место при рассмотрении уравнения Шредингера. Поэтому в случае уравнений, включающих

вторую временную производную, возможно произвольное задание волновой функции  $\psi$  и  $\partial\psi/\partial t$  для некоторого момента времени  $t$ , и в отличие от уравнения Шредингера, обеспечивающего возможность вероятностной интерпретации рассматриваемых процессов, выражение для плотности частиц  $\rho_0 = \psi\psi^*$  не является в общем случае положительно определенной величиной. И это указывает на необходимость рассматривать в общем случае одновременно частицы с различными знаками заряда [20] – электроны и позитроны.

Именно постулирование процессов генерации электронно-позитронных пар по механизму Швингера в сильном электрическом поле обычно и имеется в виду при обсуждении парадокса Клейна. В то же время оценка критической величины  $F_{cr}$  напряженности электрического поля, при превышении которой такие пары могут продуцироваться в постоянном электрическом поле в вакууме,  $F_{cr} = \neq m_0^2 c^3 / e\hbar \approx 4 \times 10^{16}$  В/см (см. (6.41) в [18]), показывает, что такие напряженности реально недостижимы. Поэтому обнаруженный недавно в работе [21] процесс образования электронов и позитронов в условиях приложения высокого электрического поля к системе, формируемой сверхрешеткой графена на гексагональном нитриде бора, и интерпретированный авторами [21] как смесь туннелирования Зенера и туннелирования Клейна, вряд ли может связываться с процессом, предсказанным Швингером. Как полагает автор, в указанной системе, возможно, реализовалось межзонное туннелирование – инициированные отталкивающим электрическим полем переходы электронов с отрицательных уровней в системе заполненных энергетических зон («море Дирака»), сформированных электронными подсистемами реальных атомов исследуемой в экспериментах [21] системы, на положительные уровни и образование при этом в заполненных состояниях «дырок» как позитронов, по аналогии с известными процессами в полупроводниках.

Но остается вопрос о том, насколько рассматриваемый Швингером процесс «вырывания» частицы и античастицы из вакуума при наложении достаточно сильного электромагнитного поля при отсутствии каких-либо других частиц может быть реализован. Как указывалось выше, согласно развиваемым в работах [3, 4] представлениям электрон является неточечной частицей вследствие

поляризации ЕМ-вакуума в его окрестности и формирования при этом области казимировской поляризации, формируемой виртуальными фотонами, с характерным размером  $a_{Ve} = 2^{1/2}\hbar/m_e c = 5.2 \times 10^{-11}$  см. Здесь важно указать, что локализованным виртуальным фотонам при заданной длине  $\lambda$  волны и энергии  $\eta\omega/2$  ставится в соответствие масса  $\Delta m_\lambda = \hbar(2\pi c\lambda^{-1} - \omega_{eff})/(2c^2)$ , где частота  $\omega_{eff} = 2\pi u_{eff}/\lambda$  определяется эффективной скоростью света  $u_{eff}$  в области казимировской поляризации ЕМ-вакуума в окрестности электрона. Тогда при полной локализации виртуального фотона, когда  $u_{eff} \rightarrow 0$ , так что  $\omega_{eff} \rightarrow 0$ , имеем:  $\Delta m_\lambda = \hbar\omega/(2c^2)$ . Это означает, что вследствие воздействия кулоновского поля исходного электрона в локализованных виртуальных фотонах неизбежно проявляются индуцируемая дипольная составляющая и затравочная масса, которые при воздействии стороннего электрического поля должны возрастать. Вопрос о том, насколько вследствие таких процессов может понизиться величина  $F_{cr}$  напряженности электрического поля по сравнению с указанной выше величиной «по Швингеру», чтобы реализовалась гетеролитическая диссоциация виртуальных фотонов с образованием пар  $e^+e^-$  в ЕМ-вакууме в присутствии электрона, играющего роль катализатора, пока остается открытым. С этой точки зрения интерес могли бы представить экспериментальные исследования возможности образования  $e^+e^-$  пар при воздействии фотонов с энергиями  $E_{ph} \leq 2m_0c^2$  на потоки электронов в сильном электрическом поле (своего рода аналог эффекта Келдыша–Франца [22]).

Поскольку все принципиальные вопросы, относящиеся к проблеме «парадокса Клейна», можно считать разрешенными, интерес может представлять получение конкретных выражений для волновой функции электрона в задаче Клейна при рассмотрении уравнения Дирака–Вильфа для произвольных энергий электронов как вне энергетического барьера  $V(x)$ , так и в области барьера. При использовании исходного, «релятивистского уравнения Дирака» такая постановка задачи исключена. При этом для определенности ограничим себя рассмотрением случая, когда  $V(x) < 2m_0c^2$ , так что рождения электрон-позитронных пар не происходит. Будем полагать, что электронная волна из одномерной области ( $-\infty < x < 0$ ) падает

на отталкивающий, бесконечно протяженный (область  $0 \leq x < \infty$ ) потенциальный барьер  $V(x)$ . Полную энергию электрона  $E$  будем представлять в виде  $E = \varepsilon + m_0c^2$ , где  $\varepsilon$  – кинетическая энергия электрона, для которой справедливо:  $\varepsilon < m_0c^2$ .

Представляя падающие на потенциальный барьер электроны из области  $x < 0$  при  $V(x) = 0$  как плоские волны с заданным импульсом  $p = m_0u$ , т.е. полагая, что  $\tilde{f}(x) = f(x)\exp(ipx/\hbar)$  и  $\tilde{g}(x) = g(x)\exp(ipx/\hbar)$ , получаем на основе (10) систему уравнений относительно  $f(x)$  и  $g(x)$ :

$$\begin{cases} [E - V(x) - m_0c^2]f(x) - pcg(x) = 0, \\ [E - V(x) + m_0c^2]g(x) - pcf(x) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Из условия равенства нулю детерминанта этой системы уравнений следует соотношение:

$$p^2c^2 = E^2 - (m_0c^2)^2, \quad (15)$$

используя которое, из уравнений (14) определяем волновую функцию в области  $(-\infty < x < 0)$  для падающей и отраженной волн при введении коэффициента отражения  $B$ :

$$\psi(x,t) = \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{p/\hbar}{(E - m_0c^2)/\hbar c} \exp\left(\frac{i}{\hbar} px\right) + \right. \\ & \left. + B \frac{-p/\hbar}{(E - m_0c^2)/\hbar c} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} px\right) \right] \times \\ & \times \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Et\right). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Полагаем, что для отраженной волны составляющие  $\tilde{f}(x)$  и  $\tilde{g}(x)$  пропорциональны  $\exp(-ipx/\hbar)$ .

Выражение для волновой функции электрона в области отталкивающего барьера,  $0 \leq x < \infty$ , при использовании соотношений  $E = \varepsilon + m_0c^2$

и  $p = \sqrt{2m_0\varepsilon\left(1 + \frac{\varepsilon}{2m_0c^2}\right)}$  при  $\varepsilon/m_0c^2 < 1$  может

быть получено из выражения (15) при заменах  $E \rightarrow E - V$  и  $p \rightarrow iq$ , где

$$\begin{cases} p = \sqrt{\frac{(V - \varepsilon)^2}{c^2} - 2m_0(V - \varepsilon)}, \\ q = \sqrt{2m_0(V - \varepsilon) - \frac{(V - \varepsilon)^2}{c^2}}. \end{cases} \quad (17)$$

В результате для волновой функции в области  $0 \leq x < \infty$  получаем при введении коэффициента проникновения  $F$  волны в область отталкивательного потенциала:

$$\psi(x,t) = F \left[ \frac{-\frac{i}{\hbar}q}{\frac{V - \varepsilon}{\hbar c}} \right] \exp\left[-\frac{1}{\hbar}qx - i\frac{1}{\hbar}Et\right]. \quad (18)$$

Представленные выражения для волновых функций показывают, что уравнение Дирака–Вильфа может адекватно использоваться во всем диапазоне возможных энергий электронов, как нерелятивистских, так и релятивистских, при  $\varepsilon/m_0c^2 < 1$ . При больших энергиях электронов необходимо учитывать процессы генерации  $e^+e^-$ -пар, инициируемые при высоких значениях напряженности электрического поля в области границы потенциального барьера.

В качестве граничных условий будем рассматривать непрерывность значений волновых функций (16) и (18) на границе  $x = 0$  [5, 15]. Соответствующие уравнения для определения коэффициентов отражения  $B$  и проникновения  $F$  волны в область отталкивательного потенциала имеют вид:

$$\begin{cases} p(1 - B) = -iqF, \\ \varepsilon(1 + B) = (V - \varepsilon)F. \end{cases} \quad (19)$$

Учитывая, что  $q/p = i$ , из (19) следует:

$$B = 1 - \frac{2\varepsilon}{V}, \quad F = \frac{2\varepsilon}{V}, \quad (20)$$

так что

$$B + F = 1. \quad (20a)$$

Это означает, что электрон как волна-частица при энергии, меньшей энергии рассматриваемого барьера, частично «поглощается» барьером и переносится в глубину барьера. Причем для ультрарелятивистских электронов, как следует из вводимых релятивистских поправок (17) к «туннельному» импульсу  $q$  при принятых нами ограничениях  $2\varepsilon/V < 1$  при  $V/(2m_0c^2) < 1$ , глубина проникновения в барьер существенно увеличивается.

Что касается рассмотренного выше простейшего варианта уравнения Дирака–Вильфа для случая двух измерений  $(x, t)$  – при переносе

частицы по одной координате, то он, этот вариант, с учетом соотношений (11) и (12) может стать количественной основой для материализации восходящей к де Бройлю идеи о волнах частиц материи, продуцируемых при движении не только элементарных частиц и атомных ядер, но и объектов больших масштабов. Здесь имеется в виду появление в последние годы ряда работ, в которых исследовались дифракционные и интерференционные явления, вызываемые потоками молекул разных размеров – от фуллеренов C<sub>60</sub> и C<sub>70</sub> [23] до молекул с молекулярными массами ~ 10 000 а.е.м. [24, 25].

«Прямоугольный потенциальный ящик» [6]

В качестве второго примера анализа одномерного движения электрона на основе уравнения Дирака–Вильфа рассмотрим движение в прямоугольной потенциальной яме [6], представляя координатную зависимость потенциальной энергии электрона  $V(x)$  в виде:

$$\begin{cases} V(x) = V_0 < 0 & \text{при } 0 < x < a, \\ V(x) = 0 & \text{при } x < 0, x > a. \end{cases} \quad (21)$$

Очевидно, что при условии  $V_0 < E < 0$ , где  $E$  – энергия электрона, спектр электрона должен быть дискретным, а при  $E > 0$  имеется непрерывный спектр двукратно вырожденных уровней.

В области  $0 < x < a$  из уравнений (10а) Дирака–Вильфа с учетом (6а) следует:

$$\frac{d^2\tilde{f}(x)}{dx^2} + \frac{\tau_e^2}{\hbar^2 R_e^2} \left[ (E - V_0)^2 - (m_0 c^2)^2 \right] \tilde{f}(x) = 0, \quad (22)$$

$$\tilde{g}(x) = -\frac{i\hbar R_e}{\tau_e [E + m_0 c^2 - V(x)]} \frac{d\tilde{f}}{dx}.$$

Преследуя лишь задачу иллюстрации определения уровней энергии  $E$  электрона в такой потенциальной яме, ограничимся рассмотрением предельного случая (см. [6], § 22) достаточно высоких стенок потенциальной ямы  $V_0$ , когда движение электрона происходит лишь на участке, ограниченном точками  $x = 0$  и  $x = a$ , так что исключается «туннельный» выход за пределы этого участка, и в указанных точках для волновых функций  $\tilde{f}(x)$  и  $\tilde{g}(x)$  следует выбрать условия  $\tilde{f} = 0$  и  $\tilde{g} = 0$ .

Решение для  $\tilde{f}(x)$  ищем в виде:

$$\tilde{f}(x) = C \sin\left(\frac{p}{\hbar}x + \delta\right), \quad (23)$$

где

$$p = \frac{\tau_e}{R_e} \sqrt{(E - V_0)^2 - (m_0 c^2)^2}. \quad (24)$$

Из условия  $\tilde{f} = 0$  при  $x = 0$  следует  $\delta = 0$ , после чего из того же условия при  $x = a$  получаем равенство  $\sin(pa/\hbar) = 0$ , из которого следует:

$$pa/\hbar = n\pi, \quad (25)$$

где  $n$  – целые положительные числа начиная с единицы. После представления полной энергии  $E$  электрона в виде  $E = E^* + m_0 c^2$  и подстановки этого выражения в (24) с учетом (6а) на основе уравнения (25) получаем квадратное уравнение для положений уровней энергии  $\varepsilon_n$  электрона относительно дна рассматриваемой потенциальной ямы:

$$(E_n^* - V_0)^2 + 2m_0 c^2 (E_n^* - V_0) - \frac{\pi^2 \hbar^2 c^2}{a^2} n^2 = 0. \quad (26)$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} E_n^* - V_0 &= m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{\pi^2 \hbar^2 c^2}{(m_0 c^2)^2 a^2} n^2} - (m_0 c^2)^2 \approx \\ &\approx \varepsilon_n \left[ 1 - \frac{\varepsilon_n}{2m_0 c^2} + \frac{2\varepsilon_n^2}{(2m_0 c^2)^2} \right], \end{aligned} \quad (27)$$

где первое слагаемое в правой части приводимого разложения

$$\varepsilon_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 a^2} n^2 \quad (28)$$

является именно тем выражением, которое рассматривается в нерелятивистской квантовой механике для определения уровней энергии частицы в прямоугольной потенциальной яме [6]. Следует указать, что приводимое разложение, показывающее, если  $2\varepsilon_n^2 / (2m_0 c^2)^2 \ll 1$ , релятивистские поправки к величине  $E_n$ , справедливо до достаточно высоких уровней возбуждения, когда величина  $\varepsilon_n$  может быть

сопоставима с  $m_0c^2$  (второе слагаемое в правой части (27)).

Естественно, что в соответствии с (27) волновую функцию (компоненты биспинора  $\tilde{f}_n(x)$ ,  $\tilde{g}_n(x)$ ), равно как и импульс  $p$ , определяющий волновую функцию (23) для каждого из возможных значений энергии  $\varepsilon_n$ , следует характеризовать нижним индексом  $n$ , то есть представлять как  $\tilde{f}_n(x)$ ,  $\tilde{g}_n(x)$  и  $p_n$  соответственно. Выражения для нормированных компонентов биспинора  $\tilde{f}_n(x)$  и  $\tilde{g}_n(x)$  в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n(x) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_n - V_0 + 2m_0c^2}{a(\varepsilon_n - V_0 + m_0c^2)^2}} \sin\left(\frac{p_n}{\hbar}x\right), \\ \tilde{g}_n(x) &= -i \sqrt{\frac{\varepsilon_n - V_0}{a(\varepsilon_n - V_0 + m_0c^2)^2}} \cos\left(\frac{p_n}{\hbar}x\right). \end{aligned} \quad (29)$$

Рассмотренные в данном разделе простые примеры дают основания считать, что уравнения (10) и (10а) фактически можно рассматривать как обобщение одномерного уравнения Шредингера на случай произвольных, в том числе релятивистских, скоростей частиц ненулевого размера.

### ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Основной результат представляемой статьи – установление причин, по которым уравнение Дирака при всей кажущейся парадоксальности (скорость частиц равна скорости света в вакууме!) демонстрирует полное соответствие экспериментальным данным и вполне обоснованно рассматривается как базовое уравнение современной квантовой науки. Понимание этих причин стало возможным благодаря работе Вильфа [7], который в поисках соответствия уравнения Дирака канонам квантовой механики, а конкретно – принципу соответствия, согласно которому каждому оператору должна ставиться в соответствие наблюдаемая физическая величина, «увидел» возможность введения в уравнение Дирака на основе использованных Дираком  $\alpha$ -матриц операторов присущей электрону внутренней структуры – собственного радиуса-вектора и некоторого характерного времени. Здесь сразу следует указать, что при построении своего уравнения Дирак, как указано выше, понимал, что вводимые им  $\alpha$ -матрицы должны быть связаны с физическими

характеристиками, описывающими некоторые *новые степени свободы*, относящиеся ко *внутреннему движению электрона*, но в рамках представлений об электроне как точечной частице это было сделать невозможно. Вильф, также рассматривая электрон как точечную частицу и опираясь на вводимые им новые операторы, характеризующие динамику собственно электрона, а также на факт существования у электрона собственного механического момента  $\frac{1}{2}\hbar$  – спина, предложил вариант возможной траектории электрона, но это не была траектория «свободно движущегося электрона».

И лишь использование ранее развитых автором представлений об электроне как ЕМ-поляроме конечного размера [3, 4] позволило обобщить уравнение Дирака и представить уравнение Дирака–Вильфа для электрона как уравнение для частицы конечного размера при произвольных энергиях этой частицы, нерелятивистских и релятивистских. Тем самым была разрешена проблема 90-летней давности: установлена природа парадоксальности релятивистского уравнения Дирака и понята физическая сущность возникновения спина как механического момента электрона. Было показано также, что уравнение Дирака–Вильфа в случае одного пространственного измерения, когда волновые функции вводятся в виде спиноров, а не биспиноров, может рассматриваться как обобщение уравнения Шредингера на случай релятивистских энергий.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dirac P.A.M.* The quantum theory of the electron // Proc. Roy. Soc. A. 117. 1928. P. 610.
2. *Дирак П.А.М.* Принципы квантовой механики. М.: Наука-Физматлит, 1979. 480 с.
3. *Тимашев С.Ф.* // Журн. физ. химии. 2022. Т. 96. № 8. С. 1093. [*Timashev S.F.* // Russ. J. of Phys. Chem. A. 2022. V. 96. №. 8. P. 1615. © Pleiades Publishing, Ltd., 2022. DOI: 10.1134/S0036024422080246 <https://rdcu.be/cUWGM>]
4. *Тимашев С.Ф.* // Там же. 2022. Т. 96. № 12. С. 1695.
5. *Эйнштейн А.* Сущность теории относительности / Собр. науч. трудов. II. Работы по теории относительности. М.: Наука, 1966. 881 с.
6. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Госиздат-Физматлит, 1963. 704 с.

7. Вильф Ф. Опусы теоретической физики. М.: Когито-Центр, 2004. 222 с.
8. Паули В. Общие принципы волновой механики. М.-Л.: Гостехиздат, 1947. 689 с.
9. Андреев А.В. // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. 2010. Т. 2. № 1–2. С. 3.
10. Соколов А.А., Тернов И.М. Релятивистский электрон. М.: Наука-Физматлит, 1974. 395 с.
11. Ohanian H.C. // American J. of Physics. 1986. V. 54. № 6. P. 500.
12. Dombey N., Caloggeracos A. // Phys.Rep. 1999. V. 315. P. 41.
13. Caloggeracos A., Dombey N. History and Physics of The Klein Paradox // Contemp. Phys. 1999. V. 40. P. 313. arXiv:quant-ph/9905076v1
14. Биберман Л., Сушкин Н. // Докл. АН СССР. 1949. Т. LXVI. С. 185.
15. Klein O. // Z. Phys. 1929. V. 53. P. 157.
16. Bongaarts P.J.M., Ruijsenaars S.N.M. // Annals of Physics. 1976. V. 101. P. 289.
17. Nikishov A.I. // Nucl. Phys. B. 1970. V. 21. P. 346.
18. Schwinger J. // Phys. Rev. 1951. V. 82. № 5. P. 664.
19. Андреев А.В. Релятивистская квантовая механика: частицы и зеркальные частицы. М.: Физматлит, 2009. 628 с.
20. Соколов А.А., Тернов И.М. Релятивистский электрон. М.: Наука-Физматлит, 1974. 395 с.
21. Berdyugin A.I., Xin N., Gao H. et al. // Science. 2022. V. 375. Issue 6579. P. 430.
22. Келдыш Л.В. // Вестн. РАН. 2016. Т. 86. № 12. С. 1059.
23. Arndt M., Nairz O., Voss-Andreae J. et al. // Nature. 1999. V. 401. Issue 6754. P. 680.
24. Arndt M., Dörre N., Eibenberger S. et al. // Atomic Interferometry, Proceedings of the Enrico Fermi International School of Physics. V. 188. Ed. G.N. Tino, M. Kasevich (IOS Press, 2014). ArXiv: 1501.07770v1
25. Eibenberger S., Gerlich S., Arndt M. et al. // Phys Chem Chem Phys. 2013. 15:14696–700. DOI:10.1039/c3cp51500a